Subject:

date:

توزیع پوآسون :

آزمایش‌هایی که نتایج حاصل از آن، تعداد وقایعی است که در فواصل زمانی یا در ناحیه‌ی مکانی مشخص بوقوع می‌پیوندند را آزمایش‌های پوآسون می‌گوییم. متغیر تصادفی X عبارت است از تعداد موفقیت‌ها در یک فاصله زمانی یا ناحیه مکانی مشخص.

مثال‌هایی از متغیر تصادفی پوآسون X :

- تعداد خودروهای که وارد پارکینگ عمومی می‌شوند
- تعداد تصادفاتی که در طول یک ماه در یک خیابان رخ می‌دهد
- تعداد تماس‌های گرفته شده با مرکز تلفن یک شرکت در طول یک روز

در آزمایش پوآسون، توزیع احتمال یک متغیر تصادفی پوآسون با پارامتر μ یعنی میانگین تعداد موفقیت‌ها در فاصله زمانی یا ناحیه مکانی مورد نظر بستگی دارد. اگر X دارای توزیع پوآسون با میانگین μ باشد آن را با نماد $p(x;\mu)$ نشان می‌دهند،

در چنین صورتی تابع توزیع احتمال پوآسون براساس این رابطه برآورد می‌آید: $x=0,1,2,3$,

$$p(x;\mu)=\frac{e^{-\mu}\cdot\mu^{x}}{x!}$$

توجه: تعداد موفقیت‌هایی که در یک فاصله زمانی یا ناحیه مکانی معین بوقوع می‌پیوندند مستقل از تعداد موفقیت‌هایی که در فواصل زمانی یا ناحیه مکانی مشخص دیگر بوقوع خواهد پیوست.

مثال: کیوسک ویژه‌ای بطور متوسط در هر ماه 2 بار سرویس می‌شود. تعداد دفعاتی که بیشتر در یک ماه سرویس می‌شود $X=$

الف) احتمال اینکه در یک ماه معین 2 بار سرویس شود چقدر است؟ ب) احتمال اینکه در سه ماه متوالی 2 بار سرویس شود چقدر است؟

الف) $\mu=2$

$$P_r(X<2)=P_r(X=0)+P_r(X=1)=\frac{e^{-2}\times 2^{0}}{0!}+\frac{e^{-2}\times 2^{1}}{1!}$$

$$=0.135+0.27=0.405$$

ب) تعداد دفعاتی که بیشتر در سه ماه تغییر می‌شود $Y=$ متغیر تصادفی $\Rightarrow \mu=6$

$$P_r(Y\geq 2)=1-P_r(Y<2)=1-\left[P_r(X=0)+P_r(X=1)\right]=1-\left[\frac{e^{-6}\times 6^{0}}{0!}+\frac{e^{-6}\times 6^{1}}{1!}\right]$$

$$1-[0.0024+0.00148]=1-0.00395=0.99605$$

Scanned with CamScanner

Subject:

date:

هرگاه در توزیع دوجمله‌ای، n عدد بزرگی باشد، p و یا q خیلی کوچک باشد می‌توان میانگین موفقیت‌ها یعنی $n.p$ را با عدد ثابت μ در توزیع پوآسون تقریب زد. در چنین صورتی احتمال تعداد پیروزی یا موفقیت را می‌توان با استفاده از تابع توزیع پوآسون محاسبه کرد. بنابراین

$$\begin{cases} n \to \infty \\ p \to 0 \end{cases} \Rightarrow n.p = \mu \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \binom{n}{x} (p^x)(1-p)^{n-x} = \frac{e^{-(n.p)} \times (n.p)^x}{x!} \Rightarrow n.p = \mu$$

مثال: فرض کنید 2٪ از کالاهای تولید شده توسط یک کارخانه معیوب باشد، مطلوبست محاسبه احتمال اینکه از 100 قلم کالا، 3 قلم کالا معیوب باشد.

$$P_r(X=3) = \binom{100}{3}(0.02)^3(0.98)^{97}$$

با توجه به اینکه $n=100$، $p=0.02$ است لذا می‌توان به جای رفتن برای حل این سؤال می‌توان از تابع توزیع احتمال پوآسون نیز استفاده کرد.

$$\mu = n.p \Rightarrow \mu = 100 \times 0.02 = 2$$

$$P_r(X=3) = \frac{e^{-2} \times 2^3}{3!} = 0.1804$$

برای محاسبه احتمال وقوع متغیر تصادفی پوآسون (X) می‌توان از جدول پوآسون نیز استفاده نمود. این جدول برای محاسبه احتمال وقوع متغیر تصادفی پوآسون هنگامی که r نشان دهنده تعداد موفقیت باشد از روابط ذیل استفاده می‌نماید:

$$X = 0, 1, 2, 3, \ldots, r$$

$$P_r(X \leq r) = \sum_{x=0}^{r} p(x;\mu)$$

احتمال حداقل r موفقیت

$$P_r(x \geq r) = 1 - P_r(X \leq r-1) = 1 - \sum_{x=0}^{r-1} p(x;\mu)$$

احتمال دقیقاً r موفقیت

$$P_r(X=r) = \sum_{x=0}^{r} p(x;\mu) - \sum_{x=0}^{r-1} p(x;\mu)$$

مثال: اطلاعات یک شرکت بیمه نشان می‌دهد 0.001 صدمه در هر سال از نوع معینی تصادف می‌بیند، احتمال اینکه این شرکت مجبور باشد برای تسویه از 15 نفر از 10000 بیمه‌گذار شرکتش در مقابل خطرات چنین تصادف‌هایی در سال معوض خسارت بپردازد را بیابید.

$$n = 10000 \quad p = 0.001 \Rightarrow \mu = n.p = 10000 \times 0.001 = 10$$

$$b(x; 10000, 0.001) \simeq p(x; 10)$$

$$P_r(x > 15) = 1 - P_r(x \leq 15) = 1 - \sum_{x=0}^{15} p(x;10) = 1 - 0.9513 = 0.0487$$

Scanned with CamScanner

Subject:

date:

توزیع نمایی :

متغیر تصادفی X دارای توزیع نمایی با پارامتر θ اگر و آن را با نماد $X \sim E(\theta)$ نمایش می دهند، هرگاه تابع چگالی احتمال آن به صورت ذیل باشد :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} & x > 0 , \theta > 0 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

معمولاً متغیر تصادفی X در توزیع نمایی، نمایانگر طول عمر یک قطعه کالا همانند طول عمر لامپ خانگی برقی و ... می باشد. توزیع نمایی در آمار کاربرد فراوان دارد. از جمله کاربردی آن در نظریه اعتماد، نظریه صف و زمان انتظار می باشد.

زمان بین دو اتفاق متوالی در توزیع پوآسون از توزیع نمایی پیروی می کند. بعبارت دیگر می توان گفت که در یک آزمایش پوآسون، توزیع زمان طی شده تا وقوع اولین اتفاق و یا توزیع زمان طی شده بین دو اتفاق متوالی از یک توزیع نمایی پیروی می کند. براین اساس در یک آزمایش پوآسون با میانگین μ زمان بین دو اولین اتفاق دارای توزیع نمایی با پارامتر $\theta = \frac{1}{\mu}$ است.

اگر متغیر تصادفی X دارای توزیع نمایی با پارامتر θ باشد می توان گفت :

$$\mu = E(\theta) \quad , \quad Var(X) = \sigma^2 = \theta^2$$

مثال : بطور متوسط تعداد 5 تلفن در یک ساعت به تلفنخانه یک شرکت زده می شود، مطلوبست :

الف) احتمال اینکه در یک ساعت آتی حداقل 2 تلفن زده شود

ب) احتمال اینکه تلفن بعدی لااقل بعد از 15 دقیقه زده شود

ج) احتمال اینکه تلفن بعدی قبل از 10 دقیقه زده شود.

$X \sim P(5) \Rightarrow \mu = 5$

الف) $P_r(X \geq 2) = 1 - P_r(X < 2) = 1 - [P_r(X=0) + P_r(X=1)] = 1 - \left[\frac{e^{-5} \times 5^0}{0!} + \frac{e^{-5} \times 5^1}{1!}\right]$

$1 - [0.033 + 0.0067] = 1 - 0.004033 = 0.9596$

ب) $Y \sim E(\frac{1}{5})$ متغیر تصادفی Y برابر زمان بین دو تلفن متوالی برحسب ساعت می باشد

Scanned with CamScanner

Subject:

date:

$$Pr(Y>1/4)=\int_{1/4}^{+\infty} 5e^{-5y}dy=(-e^{-5y})\Big|_{1/4}^{+\infty}=0-(-e^{-5/4})=e^{-5/4}=0.02865$$

$$ج) Pr(Y<1/6)=\int_{0}^{1/6} 5e^{-5y}dy=(-e^{-5y})\Big|_{0}^{1/6}=-e^{-5/6}-(-e^{0})=1-e^{-5/6}$$

$$=0.5654$$

مثال (از کتاب) :

تجربه نشان داده که تعداد اتوبوس‌هایی که وارد پارکینگ می‌شوند دارای توزیع پوآسون با $\mu=20$ در یک ساعت است یعنی در هر ساعت بطور متوسط 20 اتوبوس وارد پارکینگ می‌شوند. اگر ساعت 6 صبح پارکینگ باز شود مطلوبست محاسبه احتمال اینکه :

الف) لااقل 5 دقیقه طول بکشد تا اولین اتوبوس وارد پارکینگ شود

ب) تا ساعت 10:6 صبح اولین اتوبوس وارد پارکینگ شود .

$\mu=20/60=1/3$ = متوسط تعداد اتوبوس‌هایی که در دقیقه وارد پارکینگ می‌شوند $\Rightarrow \theta=3$

$X\sim E(3)$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}e^{-x/3} & x>0,\theta>0\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

$$الف) Pr(X>5)=\int_{5}^{+\infty}\frac{1}{3}e^{-x/3}dx=(-e^{-x/3})\Big|_{5}^{+\infty}=0-(-e^{-5/3})=e^{-5/3}$$

$$=0.1888$$

$$ب) Pr(X<10)=\int_{0}^{10}\frac{1}{3}e^{-x/3}dx=(-e^{-x/3})\Big|_{0}^{10}=-e^{-10/3}-(-e^{0})$$

$$=1-e^{-10/3}=0.9643$$

Scanned with CamScanner

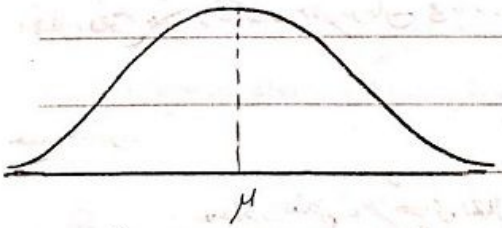
Subject:

date:

تابع توزیع نرمال یا طبیعی :

مهم‌ترین تابع چگالی احتمال متغیری پیوسته، توزیع نرمال یا طبیعی می‌باشد. نمودار این توزیع که به منحنی نرمال معروف است حالت زنگوله‌ای شکل داشته و کاملاً نسبت به خط وسط که نشان دهنده μ یا میانگین توزیع نرمال است متقارن می‌باشد.

شکل منحنی توزیع نرمال به دو پارامتر μ و σ^2 (واریانس توزیع نرمال) بستگی دارد.



متغیر تصادفی X که از توزیع نرمال تبعیت می‌کند را متغیر تصادفی نرمال می‌گوییم.

متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 است و آن را با نماد $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ نمایش می‌دهند.

هرگاه تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد:

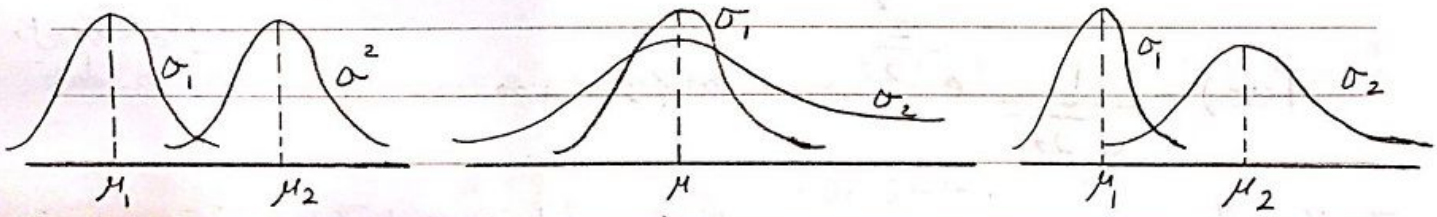
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$-\infty < x < +\infty$ $\quad \pi = 3.1415$

$-\infty < \mu < +\infty$ $\quad e = 2.71828$

$0 < \sigma < +\infty$

قبلاً بیان کردیم که هر منحنی توزیع نرمال به وسیله پارامترهای μ و σ^2 مشخص می‌شود.



$\mu_1 < \mu_2$ $\quad \sigma_1 = \sigma_2$ $\qquad$ $\sigma_1 < \sigma_2$ $\quad \mu_1 = \mu_2$ $\qquad$ $\mu_1 < \mu_2$ $\quad \sigma_1 < \sigma_2$

خصوصیات منحنی توزیع نرمال :

۱- منحنی تنها دارای یک نقطه ماکزیمم در نقطه $X = \mu$ است.

۲- مساحت سطح واقع در زیر منحنی و بالای محور xها برابر یک است. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

۳- منحنی دارای دو نقطه عطف در نقاط $X = \mu \pm \sigma$ است.

Scanned with CamScanner

Subject:

date:

۴- منحنی نسبت به خط $x = \mu$ متقارن است. میانه، میانگین و مد بر هم منطبق می‌باشند $f(\mu - a) = f(\mu + a)$

۵- دو طرف حد متوسط μ، منحنی به مجانب (ی) افقی خود یعنی محور x ها نزدیک می‌شود بنابراین: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

۶- در یک منحنی توزیع نرمال، خط افقی نشان دهنده مقادیر مختلف متغیر تصادفی نرمال X و سطح زیر منحنی نشان دهنده احتمال وقوع مقادیر مختلف متغیر نرمال می‌باشد. بنابراین برای محاسبه احتمال وقوع متغیر تصادفی X باید سطح زیر منحنی را حساب کرد

احتمال قرار گرفتن متغیر نرمال x در فاصله (a,b)

سطح زیر منحنی تابع چگالی احتمال نرمال از a تا b $\rightarrow$ $P(a < x < b) = \int_a^b f(x)\,dx$

در توزیع نرمال، به واسطه پیچیده بودن فرم تابع چگالی احتمال، نمی‌توان به سادگی روشهای معمول این انتگرال را محاسبه کرد لذا برای محاسبه احتمال وقوع متغیر تصادفی نرمال X با بیان دیگر ابتدا توزیع احتمال نرمال استاندارد را تعریف نمود:

توزیع احتمال نرمال استاندارد:

توزیع نرمالی که میانگین آن صفر و واریانس آن یک باشد را توزیع نرمال استاندارد می‌گویند. در این توزیع، Z را متغیر نرمال استاندارد می‌گویند و آن را با نماد $Z \sim N(0,1)$ نمایش می‌دهند. تابع چگالی احتمال توزیع نرمال استاندارد براساس رابطه ذیل بدست می‌آید:

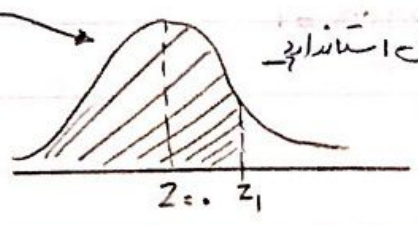
$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \qquad -\infty < Z < +\infty$$

متغیر نرمال استاندارد شده Z براساس این رابطه بدست می‌آید:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

با استفاده از جدول Z (جدول شماره ۴ کتاب) می‌توان احتمال وقوع مقادیر مختلف متغیر Z ($-3.4 < Z < 3.4$) را محاسبه نمود، نکته مهم این است که جدول مورد اشاره فقط قادر به محاسبه احتمال وقوع براساس این رابطه می‌باشد:

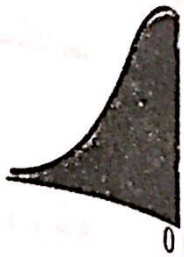
$P_r(Z < Z_1) = ?$ $\rightarrow$ مساحت ناحیه سمت چپ منحنی Z



نکته مهم: برای محاسبه احتمال وقوع متغیر تصادفی نرمال X فقط کافی است آن را به Z تبدیل نماییم و سپس با استفاده از جدول Z احتمال مورد نظر را محاسبه نمود.

Scanned with CamScanner

(جدول شماره ۴) جدول توزیع نرمال



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
−3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
−3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
−3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
−3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
−3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
−2.9	0.0019	0.0018	0.0017	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
−2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
−2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
−2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
−2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
−2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
−2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
−2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
−2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
−2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
−1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
−1.8	0.0359	0.0352	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
−1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
−1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
−1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
−1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0722	0.0708	0.0694	0.0681
−1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
−1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
−1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
−1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
−0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
−0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
−0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
−0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
−0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
−0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
−0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
−0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
−0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
−0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9278	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

Scanned with CamScanner

Subject:

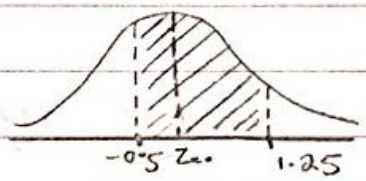
date:

مثال: اگر $X \sim N(10,16)$ باشد، مطلوبست محاسبه: $Pr(8 < X \leq 15)$

$$Pr(8 < X \leq 15) = Pr\left(\frac{8-10}{4} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{15-10}{4}\right) = Pr(-0.5 < Z \leq 1.25)$$

$$Pr(Z < 1.25) - Pr(Z < -0.5) =$$

$$0.8944 - 0.3085 = 0.5859$$



مثال: مطلوبست محاسبه احتمالات ذیل، در صورتیکه متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال با میانگین و انحراف استاندارد 3 باشد:

$$Pr(X \geq 1.5) = Pr\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{1.5-3}{3}\right) = Pr(Z \geq -0.5) = 1 - Pr(Z \leq -0.5)$$

$$1 - 0.3085 = 0.6915$$

$$Pr(Z \leq -1) = Pr\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{-1-3}{3}\right) = Pr(Z \leq -1.33) = 0.098$$

$$Pr(-2 \leq x \leq 1.8) = Pr\left(\frac{-2-3}{3} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{1.8-3}{3}\right) = Pr(-1.67 \leq Z \leq -0.4)$$

$$Pr(Z \leq -0.4) - Pr(Z \leq -1.67) = 0.3446 - 0.0475 = 0.2971$$

مثال: اگر X دارای توزیع نرمال با $\mu = 25$ و $\sigma = 6$ باشد مقدار ثابت c را طوری تعیین کنید که رابطه ذیل

$$Pr(|X-25| \leq c) = 0.9544$$

$$Pr(|X-25| \leq c) = 0.9544 \Rightarrow Pr(-c \leq X-25 \leq c) = Pr\left(\frac{-c-25}{6} \leq \frac{X-25-\mu}{\sigma} \leq \frac{c-25}{6}\right)$$

$$Pr(-c/6 \leq Z \leq c/6) = 0.9544 \Rightarrow Pr(Z \leq c/6) - Pr(Z \leq -c/6) = 0.9544$$

$$Pr(Z \leq c/6) - (1 - Pr(Z \leq c/6)) = 0.9544 \Rightarrow 2 \times Pr(Z \leq c/6) = 1 + 0.9544$$

$$Pr(Z \leq c/6) = 0.9772 \Rightarrow Pr(Z \leq 2) = 0.9772 \Rightarrow c/6 = 2 \Rightarrow c = 12$$

Scanned with CamScanner

Subject:

date:

مثال : کید کارخانه تولیدی ، لوله هایی را تولید می کند که طول این لوله ها دارای توزیع نرمال با میانگین 8 و انحراف در نمونه 0.5^m می باشد . مطلوبست :

الف) چند درصد لوله ها دارای طولی بین 7.5 تا 9 متر هستند

ب) اگر در یک روز این کارخانه 200 لوله تولید کند ، چند تعداد از این لوله ها ، طولی بیش از 9.2 متر دارند ؟

ج) 97.5 از لوله های تولید شده در این کارخانه ، طول شان از چه مقداری کمتر است ؟

د) اگر در یک روز بدانیم که طول لوله های تولید شده در این کارخانه حداقل 7.8 متر بوده است ، چند درصد لوله های تولید شده در این روز طولی کمتر از 8.4 متر دارند

ه) اگر 5 لوله را یک به یک و با جایگذاری انتخاب کرده و اندازه گیری کنیم ، احتمال اینکه حداکثر یک عدد از آن ها دارای طولی بیش از و متر باشد را بیابید ؟

الف) $P_r(7.5 < X < 9) = P_r\left(\frac{7.5-8}{0.5} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{9-8}{0.5}\right) = P_r(-1 < Z < 2)$

$= P_r(Z<2) - P_r(Z<-1) = 0.9772 - 0.1587 = 0.8185 = 0.8185 \times 100 = \%81.85$

ب) $P_r(X>9.2) = P_r\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{9.2-8}{0.5}\right) = P_r(Z>2.4) = 1 - P_r(Z<2.4)$

$1 - 0.9918 = 0.0082 \Rightarrow n = 0.0082 \times 200 = 1.64 \simeq 2$

ج) $P_r(X<a) = 0.975 = P_r\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{a-8}{0.5}\right) = 0.975 = P_r\left(Z < \frac{a-8}{0.5}\right) = 0.975$

$\frac{a-8}{0.5} = 1.96 \Rightarrow a = 8.98$

د) $P_r(X<8.4 / X \geq 7.8) \Rightarrow$ یادآوری : $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$$\frac{P_r(7.8 \leq X < 8.4)}{P_r(X \geq 7.8)} = \frac{P_r\left(\frac{7.8-8}{0.5} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{8.4-8}{0.5}\right)}{P_r\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{7.8-8}{0.5}\right)} = \frac{P_r(-0.4 \leq Z < 0.8)}{1 - P_r(Z < -0.4)}$$

$$\frac{P_r(Z<0.8) - P_r(Z<-0.4)}{1 - P_r(Z<-0.4)} = \frac{0.7881 - 0.3446}{1 - 0.3446} = 0.6767 \Rightarrow 0.6767 \times 100 = \%67.67$$

Scanned with CamScanner

Subject:

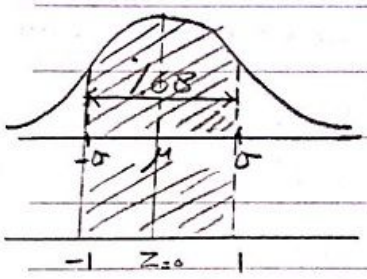
date:

$$P_r(X>9) = P_r\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{9-8}{0.5}\right) = P_r(Z>2) = 1-P_r(Z<2) = 1-0.9772 = 0.0228$$

$$P_r(Y\leq 1) = P_r(Y=0)+P_r(Y=1) = \binom{5}{0}(0.0228)^0(0.9772)^5 + \binom{5}{1}(0.0228)^1$$

$$(0.9772)^4 = 0.995$$

برای هر توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 می‌توان نوشت:



۱- تقریبا 68٪ داده‌ها در بازه $\mu \pm \sigma$ یا $Z = \pm 1$ قرار دارد.

در مبحث توزیع نرمال یا توزیع نرمال استاندارد

۲- تقریبا 90٪ داده‌ها در بازه $\mu \pm 1.64\sigma$ یا $Z = \pm 1.64$ قرار دارد.

۳- تقریبا 95٪ داده‌ها در بازه $\mu \pm 1.96\sigma$ یا $Z = \pm 1.96$ قرار دارد.

۴- تقریبا 99٪ داده‌ها در بازه $\mu \pm 2.58\sigma$ یا $Z = \pm 2.58$ قرار دارد.

برای محاسبه احتمال وقوع متغیری که از توزیع دو جمله‌ای تبعیت می‌کند هنگامیکه n بزرگ باشد می‌توان از توزیع نرمال استفاده کرد. نکته مهم در این میان آن است که در این حالت برای محاسبه احتمال وقوع متغیری که از توزیع دو جمله‌ای تبعیت می‌کند و در حقیقت یک متغیر تصادفی گسسته است از یک توزیع پیوسته استفاده می‌کنیم.

قضیه: اگر X یک متغیر تصادفی دو جمله‌ای با میانگین $\mu = n.p$ و واریانس $\sigma^2 = n.p.q$ باشد، شکل Zی توزیع متغیر تصادفی $Z = \frac{X-np}{\sqrt{npq}}$، هنگامی که n به سمت بی‌نهایت میل می‌کند دارای توزیع نرمال یک است. معمولا اگر $n \geq 30$ باشد یا مقدار p به $\frac{1}{2}$ نزدیک باشد، توزیع دو جمله‌ای به‌دقت توزیع نرمال یک توزیع متقارن می‌باشد. همچنین چون توزیع دو جمله‌ای یک توزیع گسسته و توزیع نرمال یک توزیع پیوسته است در موقع توزیع زدن با بهتر در محاسبه احتمالات از عمل تصحیح پیوستگی بصورت ذیل استفاده کنیم:

$$P_r(X<K) = P_r(X\leq K-\tfrac{1}{2}) \qquad P_r(X>K) = P_r(X\geq K+\tfrac{1}{2})$$

$$P_r(X\leq K) = P_r(X<K+\tfrac{1}{2}) \qquad P_r(X\geq K) = P_r(X>K-\tfrac{1}{2})$$

$$P_r(X=K) = P_r(K-\tfrac{1}{2}<X<K+\tfrac{1}{2})$$

Scanned with CamScanner

Subject:

date:

نکته مهم: برای تشخیص این موضوع که چه زمانی از توزیع نرمال هم‌زمان از توزیع پوآسون برای تقریب توزیع دوجمله‌ای باید استفاده شود، ذهن این نکته ضروری می‌باشد که در صورت محاسبه مقادیر np و یا nq، در صورتی که هردو بزرگتر از 5 باشند، از توزیع نرمال استفاده می‌شود وهنگامی که یکی از آنها صفر و یا یک نزدیک شود، از توزیع پوآسون استفاده می‌شود.

مثال: اگر متغیر تصادفی X دارای توزیع دوجمله‌ای $b(x; 12, \frac{1}{2})$ باشد مطلوبست محاسبه:

الف) $P_r(4 \leq X \leq 7)$ ب) $P_r(X=5)$

$n \cdot p = 12 \times \frac{1}{2} = 6 > 5$ ⇐ باتوجه به این

بنابراین از توزیع نرمال برای تقریب توزیع دوجمله‌ای احتمال وقوع این متغیر باهی استفاده می‌شود.

$\mu = n \cdot p = 6$ $\sigma^2 = n \cdot p \cdot q = 12 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 3$

$\sigma = 1.67$

الف) $P_r(4 \leq X \leq 7) = P_r(3.5 < X < 4.5) = P_r\left(\frac{3.5-6}{1.67} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{4.5-6}{1.67}\right)$

$P_r(-1.45 < Z < 0.87) = P_r(Z < 0.87) - P_r(Z < -1.45) = 0.8078 - 0.0735 = 0.7342$

ب) $P_r(X=5) = P_r(4.5 < X < 5.5) = P_r\left(\frac{4.5-6}{1.67} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{5.5-6}{1.67}\right)$

$P_r(-0.87 < Z < 0.289) = P_r(Z < -0.29) - P_r(Z < -0.87)$

$= 0.3859 - 0.1922 = 0.1937$

مثال: تاس سالمی را 720 بار پرتاب می‌کنیم. اگر متغیر تصادفی X نشان دهنده تعداد 6 های ظاهر شده باشد مطلوبست محاسبه:

$P_r(100 < X < 125) = P_r(100.5 \leq X \leq 124.5) = P_r\left(\frac{100.5-120}{10} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{124.5-120}{10}\right)$

$P_r(-1.95 < Z < 0.45) = P_r(Z < 0.45) - P_r(Z < -1.95)$

$0.6736 - 0.0256 = 0.6480$

$\mu = n \cdot p = 720 \times \frac{1}{6} = 120$ $\sigma^2 = n \cdot p \cdot q = 720 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = 100$

$\sigma = 10$

Scanned with CamScanner